الفصل السابع

تحليل الحساسية
(تحليل ما بعد الأمثلية)

كان الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الذي تم تناوله في الفصول السابقة يتم تحت مجموعة من الفروض من بينها افتراض التأكد التام من المعلومات والعلاقات المختلفة المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، ويعتبر تحليل الحساسية إحدى المزايا التي تفرزها البرمجة الخطية عند الوصول إلى الحل النهائي للمشكلة، فكثير من التغيرات قد يطرأ عليها تحول مفاجئ ممكن أن يخص موضوع الأسعار في السوق أو قد يطرأ جديد في ذهن متخذ القرار من توظيفه لقدرات بشرية جديدة أو اعتماد مسلك تكنولوجي جديد..الخ، مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعد إضافة التغيرات الجديدة.

إن إعادة حل النموذج يكون مرهقاً ويحتاج إلى وقت طويل، ولكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله وذلك باستخدام ما يسمى تحليل الحساسية، وقد يسمى أيضا بتحليل ما بعد الأمثلية، ويمكن تعريف مفهوم تحليل الحساسية بأنه " عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية[1].

وإن هذه التغيرات التي يمكن أن تحدث على نموذج البرمجة الخطية يمكن حصرها في ما يلي:

- ✓ التغيرات في معاملات دالة الهدف؛
- ✓ التغيرات في الطرف الأيمن للقيود؛
- ✓ التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود؛
- ✓ إضافة متغير أو متغيرات جديدة؛
- ✓ إضافة قيد جديد أو قيود جديدة.

إن هذه التغيرات تؤدي إلى واحد من الحالات الثلاث[2]:

- ✓ يبقى الحل الأمثل للمسألة كما هو دون أن يتأثر بالتغيرات الجديدة؛
- ✓ تبقى المتغيرات الأساسية هي نفسها ولكن ربما تتغير قيمتها نتيجة للتغيرات الإضافية (الجديدة)؛
- ✓ يتغير الحل الأساسي بأكمله من جراء التغيرات الجديدة.

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 121.

[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، 131.

I- التغيرات في معاملات دالة الهدف ومدى الأمثلية:

I-1- التغيرات في معاملات دالة الهدف:

مثال رقم (01): لو فرضنا أن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 40x_1 + 30x_2 + 25x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 100 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 240 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 360 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

وكانت النتائج في جدول الحل الأخير(جدول الحل الأمثل) كالأتي (يترك حل المشكلة كتمرين للطالب):

	C_J	40	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−2,5	0	−2,5	0	−7,5	**Z=2950**

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:

$$X_1 = 30 \; ; X_3 = 70 \; ; S_2 = 10 \; ; S_2 = S_3 = 0 \; ; Z = 2950$$

لو نفرض أن قيمة (X_1) في دالة الهدف ارتفعت من (40) إلى (42) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل (Z ; $C_J - Z_J$; Z_J) وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

	C_J	42	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
42	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		42	33,5	25	−0,5	0	8,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−3,5	0	0,5	0	−8,5	**Z=2800**

نلاحظ أن احد قيم صف ($\Delta Z = C_J - Z_J$) أكبر من صفر (0,5)، وهذا يعني بأن الحل بعد أمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل.

I-2- مدى الأمثلية:

يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل، ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية[1]:

- في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز (C_j ;j=1,2,……,n) ؛
- نعيد حساب صف (Z) وصف (C−Z)؛
- من صف (C−Z) نختبر أمثلية الحل، حيث يجب أن تكون جميع قيم صف (C−Z) أقل من أو تساوي صفر ($C-Z \leq 0$) في حالة كانت طبيعة دالة الهدف تعظيم، أو تكون جميع قيم صف (C−Z) أكبر من أو تساوي صفر ($C-Z \geq 0$)، في حال كانت طبيعة دالة الهدف تخفيض، وهذا يتطلب تكوين متراجحات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C−Z) تحتوي على (C_j)، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها حسب طبيعة دالة الهدف؛
- يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل (C_j).

مثال رقم (02): من المثال السابق حدد مدى الأمثلية للمعاملات (X_1 ; X_2 ; X_3).

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_1): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف ($\Delta Z = C_J - Z_J$)، ونضع مكان المتغير (X_1) بـ C_1 :

[1]. جهاد صياج بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص114.

	C_J	C_1	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
C_1	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		C_1	$12,5+0,5C_1$	25	$62,5-1,5C_1$	0	$-12,5+0,5C_1$	**Z= 1750**
ΔZ		0	$17,5-0,5C_1$	0	$-62,5+1,5C_1$	0	$12,5-0,5C_1$	**$+30C_1$**

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_1:

$$17,5 - 0,5C_1 \le 0 \ldots\ldots\ldots (1) \Rightarrow C_1 \ge 35$$

$$-62,5 + 1,5C_1 \le 0 \ldots\ldots\ldots (2) \Rightarrow C_1 \le 41,67$$

$$12,5 - 0,5C_1 \le 0 \ldots\ldots\ldots (3) \Rightarrow C_1 \ge 25$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_1):

$$25 \le 35 \le C_1 \le 41,67$$

نستبعد الحد 25 فيصبح : $\mathbf{35 \le X_1 \le 41,67}$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_1) بين(41,67) و(35) ولإثبات ذلك لما فرضنا(X_1=42) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبالتالي جدول الحل غير أمثل.

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_2): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف (ΔZ)، ونضع مكان المتغير (X_2) بـ C_2 :

	C_J	40	C_2	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	
ΔZ		0	$C_2-32,5$	0	−2,5	0	−7,5	**Z= 2950**

من صف(ΔZ) نجد:

$$C_2 - 32,5 \leq 0 \Rightarrow C_2 \leq 32,5$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_2):

$X_2 \leq 32,5 \leq$ غير محدود

قاعدة عامة: عندما يكون (X_i ; i=1, ...n) متغير غير أساسي عند الحل الأمثل (غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة (Z) المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_3): نتبع نفس الخطوات نجد:

$24 \leq X_3 \leq 40$

II- التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) ومدى الإمكانية:

II-1- سعر الظل: سعر الظل هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف (Z) الناتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة، أيضاً هو عبارة عن الربح الإجمالي الناجم عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة[1].

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم صف (z)، فإن سعر الظل المورد الأول هو (2,5) المقابل لـ (S_1)، وسعر الظل المورد الثاني هو (0) المقابل لـ (S_2)، وسعر الظل الثالث هو (7,5)، وهذه النتائج تعني أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحل الأمثل حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد (B) باستخدام العلاقة التالية:

الكميات الجديدة = القيم الأصلية + مقدار التغير في كمية المورد (i) X القيم المقابلة في عمود S_i الممثل للمورد (i).

مثال رقم (03): بالعودة للمثال الأول:

- نفرض على سبيل المثال زيادة (b_1) بوحدة واحدة، ستؤدي إلى زيادة الربح (2,5) دينار وتصبح قيمة دالة الهدف (Z=2952,5) حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد باستخدام العلاقة السابقة:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص120.

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72,5 \\ 9,5 \\ 28,5 \end{pmatrix}$$

ويمكن حساب قيمة (Z) الجديدة على النحو التالي:

$$Z = 25(72,5) + 0(9,5) + 40(28,5) = 2952,5$$

- نفرض أن ساعات العمل (b_3) قد ازدادت بمقدار (10) ساعات من 360 ساعة إلى 370 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (10)\begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 25(65) + 0(5) + 40(35) = 3025$$

سعر الظل لـ (b_3) هو (7,5) أي تزداد (Z) بـ (10X7,5=75) أي:

$$Z = 2950 + 75 = 3025$$

II-2- مدى الإمكانية:

يهدف مدى الإمكانية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن لقيود نموذج البرمجة الخطية (الموارد المتاحة) ولتحديد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:

- من جدول الحل الأمثل نجد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد (i)، ($\Delta b_i ; i = 1,2 ..... m$) وهو عبارة عن حاصل قسمة قيم عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفجوة التابع للقيد الذي نبحث في إيجاد مدى الإمكانية لطرفه الأيمن؛
- نحدد طرفي مدى الإمكانية (الحد الأعلى والأدنى) باستخدام الصيغة التالية:

مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد (i) – مدى القيد

مثال رقم (4): وبتطبيق الخطوات السابقة على المثال الأول نحصل على الآتي:

أولا: مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول و التي سنرمز لها بالرمز **(b_1)**:

أ. نجد مدى التغير (Δb_1) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_1 = \frac{70}{2,5} = 28$$

$$\Delta_2 b_1 = \frac{10}{-0,5} = -20$$

$$\Delta_3 b_1 = \frac{30}{-1,5} = -20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة الطرف الأيمن في القيد الأول هي 100 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 100 - (28) = 72$$
$$R_2 == 100 - (-20) = 120$$
$$R_3 = 100 - (-20) = 120$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الأول هي:

$$\mathbf{72 \le b_1 \le 120}$$

ثانيا: مدى الإمكانية لـ (b_3) التي تمثل القيد الثالث: التي تمثل القيد الثالث بنفس الطريقة السابقة نحصل على:

$$\mathbf{300 \le b_3 \le 380}$$

ثالثا: مدى الإمكانية لـ (b_2):

إذا كان متغير الفجوة التابع للأحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة المتغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل.

فمثلا: نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الثاني(S_2) هو متغير أساسي وقيمته (10)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية (b_2) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (230=10−240) ومنه مدى الإمكانية:

$$\mathbf{230 \le b_2 \le} \text{ غير محدد}$$

ملاحظة:

- في حالة إشارة القيد يساوي أو أكبر من أو يساوي فإن المدى التغير له هو عبارة عن حاصل قسمة عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود المتغير الإصطناعي التابع له؛
- في حالة وجود أكثر من حد أعلى نأخذ القيمة الأصغر، وفي حالة وجود أكثر من حد أدنى نأخذ القيمة الأكبر.

III- التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود:

إن التغير قد يشمل معاملات متغيرات القرار فإذا حدث أي تغير في معاملات هذه المتغيرات فإن ذلك سوف يؤدي إلى تغير عناصر المصفوفة، وعليه فإنه سوف يكون من الصعب معرفة اثر هذه التغيرات مباشرة على الحل الأمثل، وسوف لن تزودنا بأي معلومات عن اثر هذا التغير، وعليه يصعب دراسة هذا النوع من التغيرات في معاملات متغيرات القرار وفي مثل هذه الحالة يفضل إعادة حل النموذج الرياضي مجدداً بعد إدخال التغيرات (لا يمكن دراسة اثر تحليل الحساسية)[1].

IV- إضافة متغير أو متغيرات جديدة:

إن إضافة متغير جديد يؤثر على أمثلية المسألة حيث أن إضافة هذا المتغير سيضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة. فإن هذا المتغير الجديد المضاف قد يصبح متغيراً أساسيا إذا دخل الحل ويكون له دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أما إذا لم تكن له القدرة على تحسين قيمة دالة الهدف فإنه سيكون متغيراً غير أساسي وتكون قيمته صفر[2].

القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل = مصفوفة متغيرات الفجوة في الحل الأمثلx عمود القيم الأساسية للمتغير الجديد

وبناء على هذا يتم إعادة حساب قيم صف (Z) و (ΔZ) واختبار مدى أمثلية الحل حسب طبيعة دالة الهدف.

مثال رقم (05): بالعودة للمثال السابق نفرض إضافة متغير جديد (X_4) وبربح مقداره 20 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (1; 2; 4) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود (X_4) تتم كما يلي:

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص128.

[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 144.

$$\begin{pmatrix} 2,5 & 0 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -1,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول الحل الأمثل يصبح كما يلي :

	C_J	40	30	25	20	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	0,5	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	-0,5	-0,5	1	-0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	0,5	-1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	32,5	2,5	0	7,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	-2,5	0	-12,5	-2,5	0	-7,5	**Z=2950**

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ($\Delta Z \leq 0$) وهذا يعني أن الحل الأمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح لم يتغيرا، تشير هذه النتيجة إلى أن إضافة منتج جديد لم تؤثر في الربح، حيث بقيت قيمة الربح كما هي 2950 دينار ولكن هذه الحالة ليست دائمة.

V- إضافة قيد أو قيود جديدة:

إن إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، وعلى قيمة دالة الهدف، لتوضيح ذلك نستعين بالمثال التالي:

مثال رقم (06): من المثال الأول نضيف قيد جديد كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

وترغب المؤسسة في معرفة تأثير إدخال القيد الجديد على الحل الأمثل، ولمعرفة تأثير دخول القيد الجديد على الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

1. نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_4 = 300$$

2. إن متغير الفجوة (S_4) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

3. يبين الجدول الحل الأمثل أن (X_1) و (X_3) دخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة (S_4) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين (X_1) و (X_3) على صف (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \end{pmatrix} - \left[2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ 2,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

وبناء على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

	C_J	40	30	25	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	−0,5	0	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	−0,5	0	10
40	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	0	30
0	S_4	0	−0,5	0	−0,5	0	−0,5	1	70
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−2,5	0	−2,5	0	−7,5	0	**Z=2950**

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ($\Delta Z \leq 0$) وهذا يعني أن الحل الأمثل لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة المتغير الفجوة (S_4) إلى الحل ولكن قيمة الربح لم تتغير، ولكن هذه الحالة ليست دائما.

ملاحظة:

1. إذا كانت في عمود الثوابت (B) قيمة سالبة مثلا (−70) بدلا من (70)، مما يجعل الحل غير ممكن، يتطلب ذلك تطبيق طريقة المبسطة للنموذج المقابل (Dual) لتخلص من قيمته السالبة؛

2. يمكن تأكد من القيد هل هو قيداً فائضاً (لا يؤثر على الحل) أو قيد لا يتحقق.

فمثلا بالعودة للقيد المضاف السابق:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

بتعويض قيم $(X_1 ; X_2 ; X_3)$ نحصل على :

$$3(30) + 2(0) + 2(70) = 230 \prec 300$$

نجد أن القيد يتحقق، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيداً فائضا لا تأثير له على الحل.

VI- تمارين محلولة

التمرين الأول : لتكن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 20x_1 + 25x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل البرنامج المقابل هو:

	C_J	20	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
25	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	25	0	11	3	
ΔZ		0	0	0	-11	-3	Z=310

المطلوب:

1. نفرض أن دالة الهدف للمشكلة قد تغيرت إلى:

$$Max(z) = 20x_1 + 45x_2$$

استخرج جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة حدد مدى الأمثلية لمعامل X_1 و X_2 ؛

2. نفرض أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير إلى 40 ، 23 ، 30 على التوالي ؛ أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة Z ؛
3. أوجد مدى الإمكانية لكل من b_1 , b_2 , b_3 ؛

حل التمرين الأول:

1. نلاحظ أن قيمة (X_2) في دالة الهدف ارتفعت من (25) إلى (45) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل $(Z_J ; C_J - Z_J ; Z)$ وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

	C_J	20	45	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
45	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	45	0	23	-1	
ΔZ		0	0	0	-23	1	Z=430

نلاحظ أن احد قيم صف ($\Delta Z = C_J - Z_J$) أكبر من صفر (1)، وهذا يعني بأن الحل لا يمثل الحل الأمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل، المتغيرة الداخلة هي (S_3) والخارجة هي (X_1) والجدول الجديد هو على الشكل الأتي:

	C_J	20	45	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{-3}{2}$	1	10
45	X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	10
0	S_3	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	20
Z_J		$\frac{45}{2}$	45	0	$\frac{45}{2}$	0	Z=450
ΔZ		$\frac{-5}{2}$	0	0	$\frac{-45}{2}$	0	

ومن الجدول أعلاه هو جدول حل أمثل لأن ($\Delta Z \leq 0$) بعد تغير معامل (X_2) في دالة الهدف .

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_1): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف ($\Delta Z = C_J - Z_J$)، ونضع مكان المتغير (X_1) بـ C_1 :

	C_J	C_1	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
25	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
C_1	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		C_1	25	0	$15-\frac{C_1}{5}$	$\frac{2C_1}{5}-5$	$Z=150+8C_1$
ΔZ		0	0	0	$\frac{C_1}{5}-15$	$5-\frac{2C_1}{5}$	

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_1:

$$\frac{C_1}{5}-15\le 0 \ldots\ldots\ldots (1)\Rightarrow C_1\le 75$$

$$5-\frac{2C_1}{5}\le 0 \ldots\ldots\ldots (2)\Rightarrow C_1\ge \frac{25}{2}$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_1):

$$\frac{25}{2}\le C_1\le 75$$

$$\frac{25}{2}\le X_1\le 75$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_1) بين(75) و(12,5).

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_2): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف ($\Delta Z=C_J-Z_J$)، ونضع مكان المتغير (X_2) بـ C_2 :

	C_J	20	C_2	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
C_2	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	C_2	0	$\frac{3C_2}{5}-4$	$8-\frac{C_2}{5}$	$Z=6C_2+160$
ΔZ		0	0	0	$4-\frac{3C_2}{5}$	$\frac{C_2}{5}-8$	

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_2:

$$4-\frac{3C_2}{5}\le 0 \ldots\ldots\ldots (1)\Rightarrow C_1\ge\frac{20}{3}$$

$$\frac{C_2}{5}-8\le 0 \ldots\ldots\ldots (2)\Rightarrow C_2\le 40$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_2):

$$\frac{20}{3}\le C_2\le 40$$

$$\frac{20}{3}\le X_2\le 40$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_2) بين(40) و(6,66)، ولإثبات ذلك لما فرضنا(X_2=45) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبتالي جدول الحل غير أمثل.

2. لدينا (b_2) قد ازدادت بمقدار (3) ساعات من 20 ساعة إلى 23 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (3)\begin{pmatrix} \frac{-7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{39}{5} \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 20\left(\frac{37}{5}\right) + 25\left(\frac{39}{5}\right) = 343$$

سعر الظل لـ (b_2) هو (11) أي تزداد (Z) بـ (3X11=33) أي:

$$Z = 310 + 33 = 343$$

3. مدى الإمكانية:

✓ مدى الإمكانية للطرف الأيمن للقيد الأول والتي سنرمز لها بالرمز (**b_1**):

بما أن متغير الفجوة التابع للقيد الأول ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة متغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل، نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الأول(S_1) هو متغير أساسي وقيمته (6)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية (b_1) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (40−6=34) ومنه مدى الإمكانية:

$34 \leq b_1 \leq$ غير محدد

✓ مدى الإمكانية لـ (b_2):

أ. نجد مدى التغير (Δb_2) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_2 = \frac{6}{\frac{-7}{5}} = \frac{-30}{7}$$

$$\Delta_2 b_2 = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10$$

$$\Delta_3 b_2 = \frac{8}{\frac{-1}{5}} = -40$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثاني هي 20 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 20 - \left(\frac{-30}{7}\right) = 24,28$$

$$R_2 == 20 - 10 = 10$$

$$R_3 = 20 - (-40) = 60$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثاني هي:

$$\mathbf{10 \leq b_2 \leq 24,28}$$

✓ مدى الإمكانية لـ (b_3):

أ. نجد مدى التغير (Δb_3) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_2 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_3 b_3 = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثالث هي 30 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 30 - (-30) = 60$$

$$R_2 == 30 - (-30) = 60$$

$$R_3 = 30 - 20 = 10$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثالث هي:

$$10 \le b_3 \le 60$$

التمرين الثاني: ليكن نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 59 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 120 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

المطلوب:

1. اوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل ؛
2. أوجد مدى الأمثلية لـ X_3 ؛
3. نفرض أننا أضفنا متغير جديد للمشكلة الأصلية معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي : 2 ، 2 ، 2 أما معامله في دالة الهدف يساوي 12 ، أوجد القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل؛
4. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالآتي :

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 40$$

ما مدى تأثير هذا القيد على المشكلة .

حل التمرين الثاني:

1. الحل الأمثل للبرنامج الخطي:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 80$

القيد الثاني: $2x_1 + x_2 + x_3 + S_2 = 59$

القيد الثالث: $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 120$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	10	12	6	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	1	2	3	1	0	0	80	40
0	S_2	2	1	1	0	1	0	59	59
0	S_3	3	5	4	0	0	1	120	24
Z_J		0	0	0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		10	12	6	0	0	0	Z=0	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (S_3)

T_2	C_J	10	12	6	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{-2}{5}$	32	-
0	S_2	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{-1}{5}$	35	25
12	X_2	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	24	40
Z_J		$\frac{36}{5}$	12	$\frac{48}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$\frac{14}{5}$	0	$\frac{-18}{5}$	0	0	$\frac{-12}{5}$	Z=288	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (S_2)

T_3	C_J	10	12	6	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	37
10	X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	25
12	X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9
Z_J		10	12	10	0	2	2	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	-4	0	-2	-2	Z=358

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول الحل أمثل، والنتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 25 \; ; X_2 = 9 ; X_3 = 0 ; S_1 = 37 \; ; S_2 = S_3 = 0 ; Z = 358$$

2. مدى الأمثلية لـ (X_3):

بما أن المتغير (X_3) غير أساسي عند الحل الأمثل (غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة (Z) المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

$10 \leq X_3 \leq$ غير محدود

3. إضافة متغير جديد (X_4) وبربح مقداره 12 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (2; 2; 2) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود (X_4) تتم كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول حل الأمثل يصبح كما يلي:

T_3	C_J	10	12	6	12	0	0	0	B	$\frac{B}{X_4}$
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	37	25,9
10	X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	25	21,87
12	X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{-2}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9	-
Z_J		10	12	10	8	0	2	2	**Z=358**	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	**0**	-4	4	**0**	**-2**	-2		

من خلال الجدول نلاحظ ليس كل ($\Delta Z \leq 0$) وهذا يعني أن الحل ليس أمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح سوف تتغير، المتغيرة الداخلة (X_4) والخارجة (X_1) ويكون جدول الحل كالآتي:

T_4	C_J	10	12	6	12	0	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{23}{4}$
12	X_4	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{175}{8}$
12	X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{61}{4}$
Z_J		$\frac{27}{2}$	12	$\frac{21}{2}$	12	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$Z=\frac{891}{2}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$\frac{-7}{2}$	**0**	$\frac{-9}{2}$	0	0	$\frac{-9}{2}$	$\frac{-3}{2}$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حل أمثل، ونتائجه هي كالآتي:

$$X_2 = \frac{61}{4}; X_4 = \frac{23}{2}; X_1 = X_3 = 0; S_1 = \frac{23}{4}; S_2 = S_3 = 0; Z = \frac{891}{2}$$

4. القيد الجديد:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

✓ نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + S_4 = 40$$

إن متغير الفجوة (S_4) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 40)$$

يبين جدول الحل الأمثل أن (X_1) و (X_2) داخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة (S_4) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين (X_1) و (X_2) على الصف (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي: